1.7.16 Kružnice opsaná a kružnice vepsaná II

Předpoklady: 010715

Př. 1: Zopakuj postupy na konstrukci kružnice opsané a vepsané trojúhelníku. Jak určíš jejich poloměry (nezapomeň, že poloměr je vždy určen jako vzdálenost dvou jednoznačně určených bodů)?

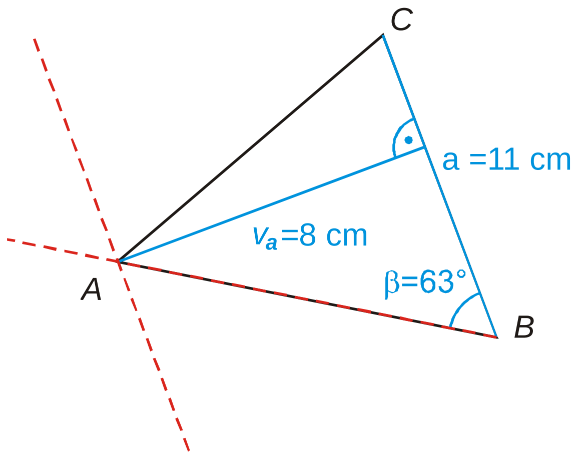
Střed kružnice opsané leží na průsečíků os stran (je stejně daleko od všech vrcholů trojúhelníku).
Poloměr kružnice opsané je vzdálenost středu od libovolného vrcholu.

Střed kružnice vepsané leží na průsečíků os úhlů (je stejně daleko od všech stran trojúhelníku).
Poloměr kružnice vepsané určíme pomocí kolmice na libovolnou stranu trojúhelníku procházející středem. Vzdálenost paty této kolmice od středu představuje poloměr kružnice vepsané.

Pedagogická poznámka: V následujícím příkladu opět dávám plusy za správné rýsování, ale pouze v případě, že správné narýsován i poloměr kružnice vepsané.

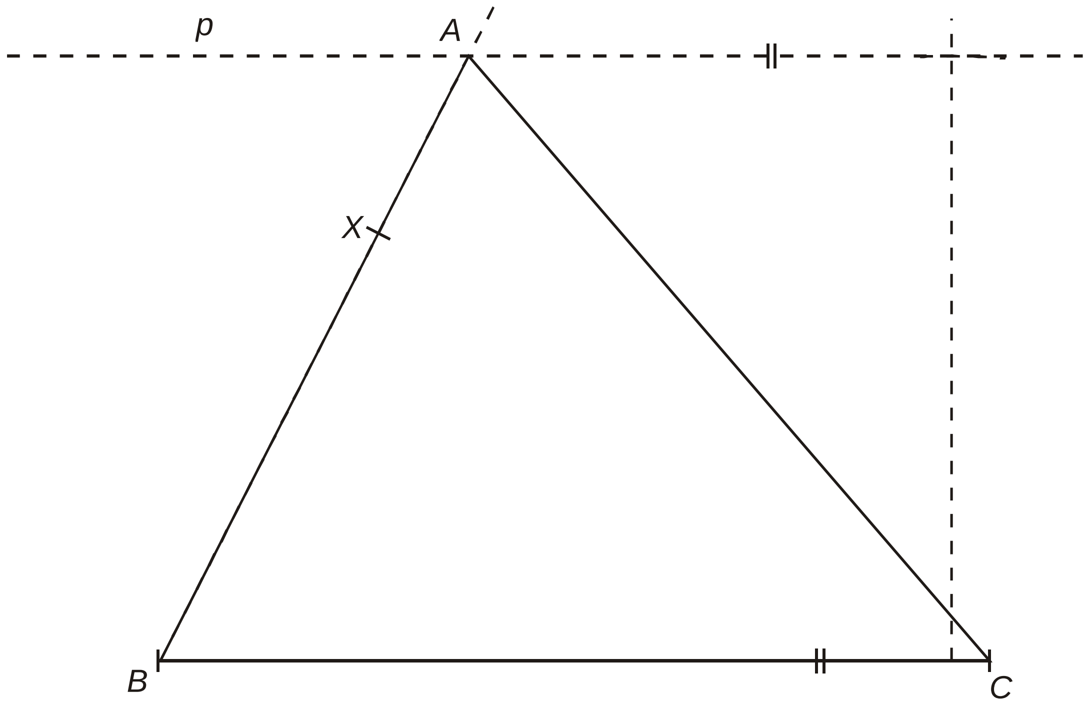
Př. 2: Narýsuj trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $a = 11\text{ cm}$, $\beta = 63°$, $v_a = 8\text{ cm}$. Narýsuj kružnici trojúhelníku vepsanou (nezapomeň na náčrtek a návrh konstrukce).

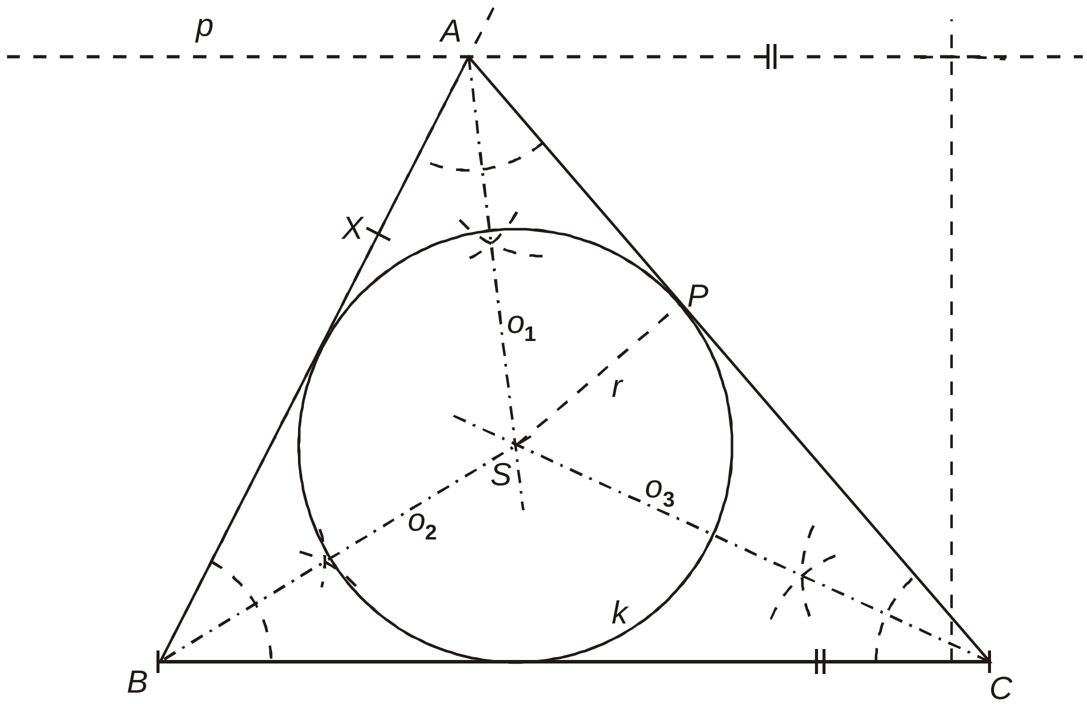
Náčrtek:



Návrh postupu:
1. strana *a*
2. úhel β
3. rovnoběžka se stranou *a* ve vzdálenosti 8 cm (kvůli výšce v_a)
4. průsečík ramene úhlu s rovnoběžkou: bod *A*
5. trojúhelník *ABC*
6. osy úhlů
7. průsečík os úhlů je střed vepsané kružnice
8. kolmice z libovolné strany na střed
9. kružnice (poloměr je vzdálenost středu od paty kolmice)

Trojúhelník *ABC*





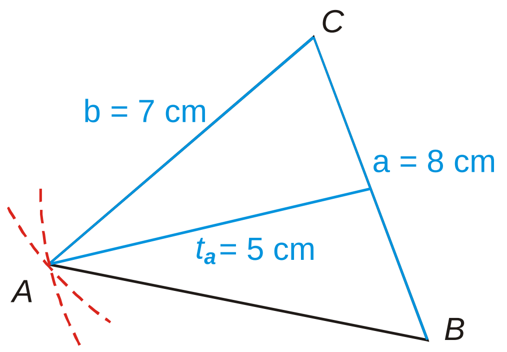
Zápis konstrukce:

1. úsečka BC, $|BC| = 11\,\text{cm}$
2. bod X, $|\sphericalangle CBX| = \beta = 63°$
3. přímka p, $p \parallel BC$ ve vzdálenosti 8 cm
4. bod A je průsečík polopřímky BX s přímkou p
5. trojúhelník ABC
6. o_1 osa úhlu α, o_2 osa úhlu β, o_3 osa úhlu γ,
7. bod S je průsečík přímek o_1 a o_2 (a také o_3)
8. přímka r, $r \perp AC$, r prochází bodem S

9. bod P je průsečík přímky r s přímkou AC
10. kružnice $k\left(S;|SP|\right)$

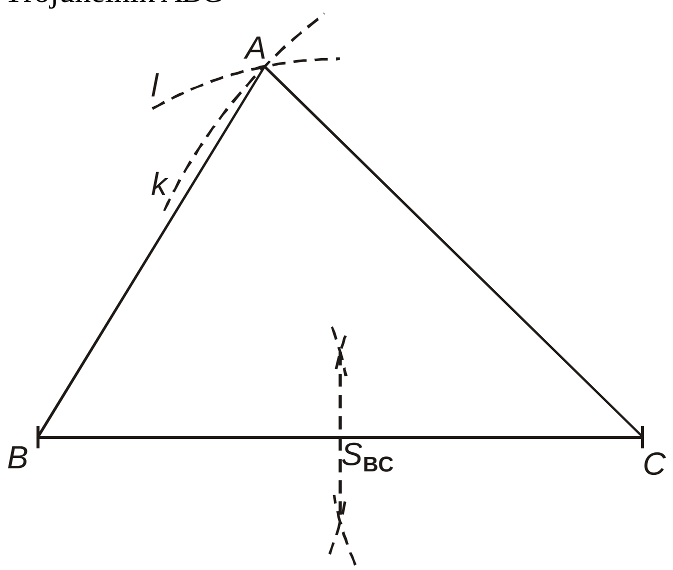
Př. 3: Narýsuj trojúhelník *ABC*, je-li dáno: $b = 7\text{ cm}$, $a = 8$, $t_a = 5\text{ cm}$. Narýsuj kružnici trojúhelníku opsanou (nezapomeň na náčrtek a návrh konstrukce).

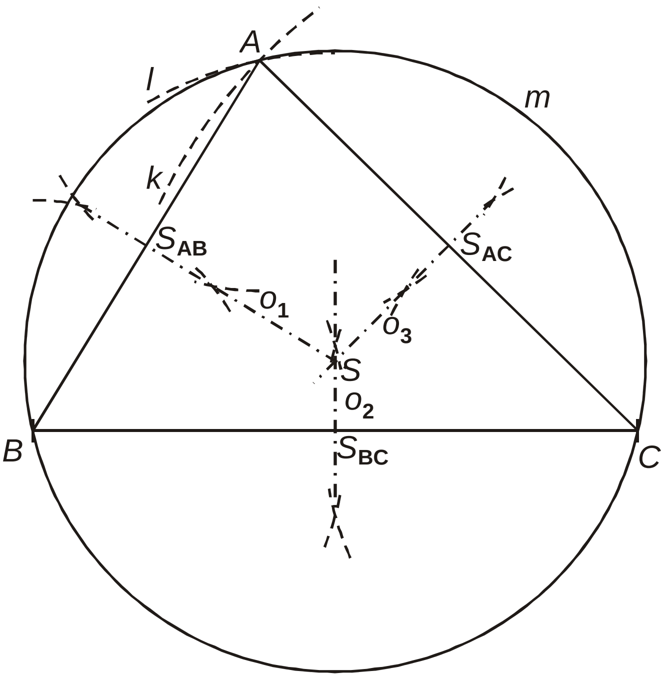
Náčrtek:



Návrh postupu:
1. strana a
2. kružnice $k\left(B;7\text{ cm}\right)$ kvůli straně b (vrchol A má být od vrcholu C vzdálen 7 cm)
3. kružnice $l\left(S_{BC};5\text{ cm}\right)$ kvůli těžnici t_a (vrchol A má být od středu strany BC vzdálen 5 cm)
4. průsečík kružnic: bod A
5. trojúhelník ABC
6. osy stran
7. průsečík os stran je střed opsané kružnice
8. kružnice (poloměr je vzdálenost středu od libovolného vrcholu)

Trojúhelník *ABC*

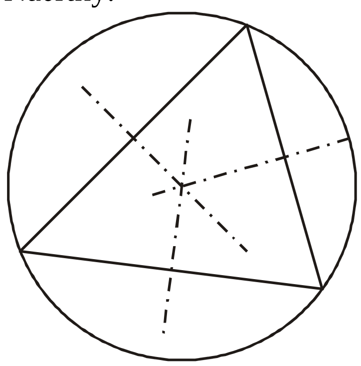


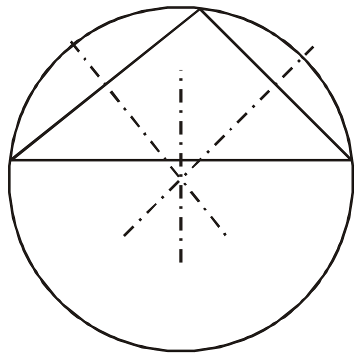


Zápis konstrukce:
1. úsečka BC, $|BC| = 11\,\text{cm}$
2. kružnice $k(B; 7\text{ cm})$
3. kružnice $l(S_{BC}; 5\text{ cm})$
4. bod A je průsečík kružnic k a l
5. trojúhelník ABC
6. o_1 osa úsečky AB, o_2 osa úsečky BC, o_3 osa úsečky AC
7. bod S je průsečík přímek o_1 a o_2 (a také o_3)
8. kružnice $m(S; |SA|)$

Př. 4: Kdy leží střed kružnice opsané uvnitř trojúhelníka? Kdy leží vně trojúhelníka? Může ležet střed kružnice opsané na některé ze stran trojúhelníka? Na které a kdy? Potvrď své odhady rýsováním.

Náčrtky:



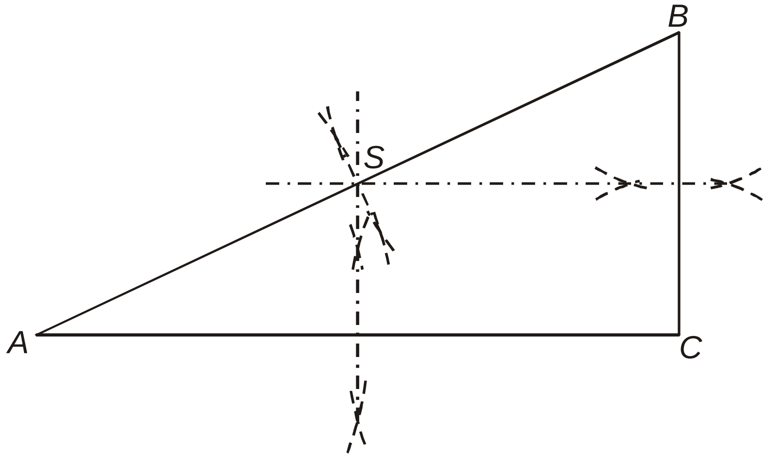


Z náčrtků se zdá, že:
- čím více se trojúhelník blíží rovnostrannému (čím menší je jeho největší úhel), tím blíže ke středu trojúhelníku je střed kružnice opsané,
- čím „více je trojúhelník tupoúhlý" (čím větší je jeho největší úhel), tím dál od středu a více mimo vnitřek trojúhelníku se posunuje střed kružnice opsané,

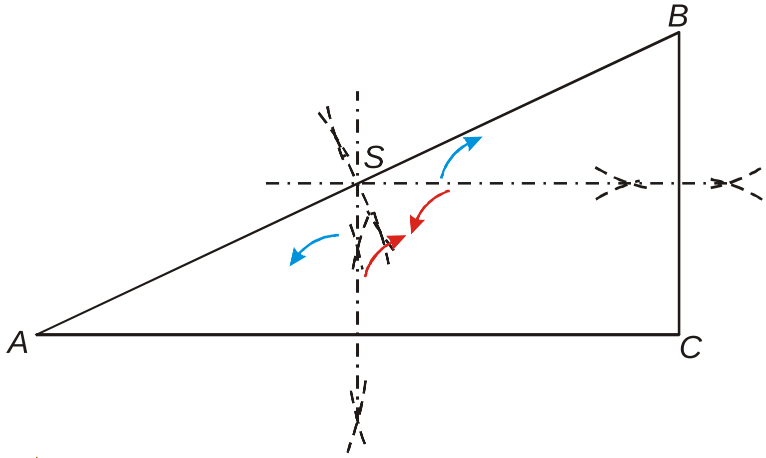
⇒ Nápad:

- Pokud je trojúhelník ostroúhlý, střed kružnice opsané leží uvnitř trojúhelníku.
- Pokud je trojúhelník tupoúhlý, střed kružnice opsané leží vně trojúhelníku.
- Pokud je trojúhelník pravoúhlý, střed kružnice opsané leží na straně trojúhelníku naproti pravému úhlu.

Ověření: Narýsujeme pravoúhlý trojúhelník a zjistíme, kde leží střed kružnice opsané.



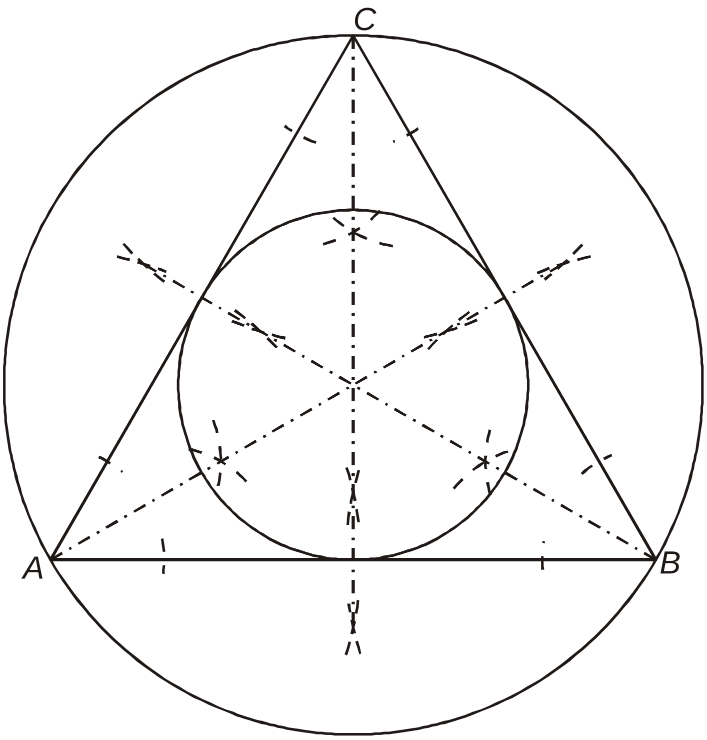
Podle předpokladů střed kružnice opsané leží na straně *AB* naproti pravému úhlu γ.



- Kdyby se úhel γ zvětšil (a trojúhelník se změnil na tupoúhlý), směry os se změní ve směru modrých šipek a jejich průsečík se posune vně trojúhelníku.
- Kdyby se úhel γ zmenšil (a trojúhelník se změnil na ostroúhlý), směry os se změní ve směru červených šipek a jejich průsečík se posune dovnitř trojúhelníku.

Př. 5: Je možné, aby střed kružnice opsané i vepsané ležel v jenom bodě? U kterých trojúhelníků? Potvrď svůj odhad rýsováním.

Pokud má střed kružnice opsané splynout se středem kružnice vepsané, musí alespoň pro dvě osy úhlů platit, že jsou zároveň i osami protější strany ⇒ to platí pokud je osa strany (úhlu) osou souměrnosti celého trojúhelníku ⇒ trojúhelník musí alespoň dvě osy souměrnosti ⇒ trojúhelník musí být rovnostranný (ten má osy souměrnosti dokonce tři).



Dodatek: Dobrou doplňující otázkou je najít trojúhelník, na kterém je vidět, že ke splynutí obou středů nestačí, aby byl trojúhelník jenom rovnoramenný (každý tupoúhlý rovnoramenný trojúhelní – opsaná kružnice má střed vně a tudíž nemůže být shodný se středem kružnice vepsané).

Př. 6: Na zítřejší hodinu si připrav přehled nejdůležitějších vědomostí, které jsme zjistili o trojúhelnících.

Shrnutí: Pravoúhlý trojúhelník je hraniční případ, kdy střed kružnice opsané leží na nejdelší straně.